Simplicity of a vertex operator algebra whose Griess algebra is the Jordan algebra of symmetric matrices (Finite Groups, Vertex Operator Algebras and Combinatorics)

新堀, 秀和; 佐垣, 大輔

数理解析研究所講究録
第 1656 巻 2009 年 89-96

Simplicity of a vertex operator algebra whose Griess algebra is the Jordan algebra of symmetric matrices

新堀 秀和 (Hidekazu NIIBORI)
筑波大学大学院
数理物質科学研究科
Graduate School of
Pure and Applied Sciences,
University of Tsukuba
niibori@math.tsukuba.ac.jp

佐垣 大輔 (Daisuke SAGAKI)
筑波大学 数学系
Institute of Mathematics,
University of Tsukuba
sagaki@math.tsukuba.ac.jp

0 概要.

本論説は, 論文 [NS] において得られた結果の解説である.

$V=\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}}V_n$ を $\mathbb{C}$ 上の頂点作用素代数 (vertex operator algebra, 以下 VOA; VOA についての詳細は [LL] などを参照されたい) とし,

$$Y(\cdot\,,z):V\to(\mathrm{End}\,V)[[z,z^{-1}]],\qquad v\in V\mapsto\sum_{m\in\mathbb{Z}}v_mz^{-m-1}\in(\mathrm{End}\,V)[[z,z^{-1}]]$$

をその頂点作用素とする. $u,v\in V_2$ に対して $u\cdot v:=u_1v$ と定めると, VOA の公理から, $u\cdot v\in V_2$ となる. すなわち, V_2 はこの積によって $\mathbb{C}$ 上の代数となる. さらに,

$$\textbf{(G)}\quad \dim V_0=1\quad\text{かつ}\quad\dim V_1=0$$

であれば, V_2 は可換代数 (但し, 一般には結合代数ではない) となることが知られている ([FLM, §10.3] および [M, §5] 参照). 本論説では, 条件 (G) の下での可換 $\mathbb{C}$-代数 V_2 を **Griess 代数** と呼ぶことにする.[1]

次に **Jordan 代数** について簡単に説明しよう. Jordan 代数とは, $\mathbb{C}$ 上の可換代数 J であって, $a^2\cdot(b\cdot a)=(a^2\cdot b)\cdot a$ $(a,b\in J)$ が成り立つもののことであ

[1] V_2 上には, $u_3v=(u,v)\mathbf{1}$ $(u,v\in V_2)$ によって, 内積 $(\cdot\,,\cdot)$ が定まる ($\mathbf{1}\in V_0$ は V の真空元; $\dim V_0=1$ なので $V_0=\mathbb{C}\mathbf{1}$ であることに注意). "Griess 代数" といった場合, V_2 とこの内積の組 $(V_2,(\cdot\,,\cdot))$ を指すことが多いようであるが, 本論説や論文 [NS] では, 内積は考えずに, V_2 のみを Griess 代数と呼ぶことにしている.

る．本論説では．対称行列全体のなす (単純な) Jordan 代数を扱う; $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ とし．$\mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$ を複素数係数の d 次対称行列全体のなす集合とする．$\mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$ 上に $A \cdot B := (AB + BA)/2$ ($A, B \in \mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$) によって積を定めると，$\mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$ は (単純な) Jordan 代数になることが知られている．

さて，Ashihara と Miyamoto [AM] は，(Lam [La, §4.1] の結果を基にして) 次のような VOA を構成した．

定理 1 ([AM]; cf. [La, §4.1]). 各 $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ と各 $r \in \mathbb{C}$ に対して，次の条件 (i) ～ (iv) を満たす VOA $V_{d,r} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (V_{d,r})_n$ が存在する．

(i) $V_{d,r}$ の中心電荷は dr,

(ii) $V_{d,r}$ は条件 (G) を満たす，

(iii) Griess 代数 $(V_{d,r})_2$ は Jordan 代数になる，

(iv) Jordan 代数として，$(V_{d,r})_2 \cong \mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$.

ところで，VOA の中心電荷は，その VOA の構造や表現論に大きな影響を与える．したがって，上の定理の VOA $V_{d,r}$ も中心電荷の値 (言い換えれば，$r \in \mathbb{C}$ の値) によって，その構造等が大きく変化する可能性がある．論文 [NS] では，このことを調べる一環として，VOA $V_{d,r}$ の単純性について調べた．[NS] の主結果を述べる前に次のことに注意しておく．

注意. $d = 1$ の場合には，$V_{d,r} = V_{1,r}$ は Virasoro VOA $M_{r,0}/\langle L_{-1}1 \rangle$ ([W] における記号) と同型になる．そして，[W, Lemma 4.2] により，$M_{r,0}/\langle L_{-1}1 \rangle$ が単純になるための r に関する条件は知られている．よって．$V_{d,r}$ の既約性について調べる際には，$d \geq 2$ の場合を考えればよい．

[NS] の主結果は次の定理である．

定理 2. $d \geq 2$ とする．VOA $V_{d,r}$ が単純であるための必要十分条件は，r が整数ではないことである:

$$\text{VOA } V_{d,r} \text{ が単純} \quad \Longleftrightarrow \quad r \notin \mathbb{Z}$$

さらに，論文 [NS] では，$r \in \mathbb{Z}$ の場合に (すなわち，$V_{d,r}$ が単純ではない場合に)，VOA $V_{d,r}$ の (自明でない) 最大イデアルの生成元を explicit に与えた．

1 Ashihara と Miyamoto による VOA.

1.1 リー代数 $\mathcal{L}_{d,r}$. 以下, $d \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を固定する. $\widehat{\mathfrak{h}}$ をランク d の Heisenberg 代数とする. すなわち, $\widehat{\mathfrak{h}}$ は $\{v^i(m) \mid 1 \leq i \leq d, m \in \mathbb{Z}\} \cup \{\mathbf{c}\}$ を基底とする $\mathbb{C}$ 上のリー代数で, そのリー積は

$$\begin{aligned}&[v^i(m),\ v^j(n)] = \delta_{m+n,0}\,\delta_{i,j}\, m\mathbf{c} \quad (1 \leq i,\ j \leq d\,;\ m, n \in \mathbb{Z}),\\ &[\mathbf{c},\ \widehat{\mathfrak{h}}] = \{0\},\end{aligned} \tag{1.1}$$

によって与えられている. $U(\widehat{\mathfrak{h}})$ をリー代数 $\widehat{\mathfrak{h}}$ の普遍展開環とし, その剰余代数 $U(\widehat{\mathfrak{h}})/\langle \mathbf{c} - 1\rangle$ を考える. ここで, $\langle \mathbf{c} - 1\rangle$ は, $\mathbf{c} - 1 \in U(\widehat{\mathfrak{h}})$ で生成される $U(\widehat{\mathfrak{h}})$ の両側イデアルである. $1 \leq i, j \leq d$ と $m, n \in \mathbb{Z}$ に対して,

$$v^{ij}(m,\, n) := v^i(m)v^j(n) \mod \langle \mathbf{c} - 1\rangle \tag{1.2}$$

とし,

$$\begin{aligned}\mathcal{B} := \big\{v^{ii}(m,\, n) \mid 1 \leq i \leq d\,;\ m,\, n \in \mathbb{Z} \text{ with } m \leq n\big\}\ \cup&\\ \big\{v^{ij}(m,\, n) \mid 1 \leq i < j \leq d\,;\ m,\, n \in \mathbb{Z}\big\}&\end{aligned}$$

とおく. そして,

$$\mathcal{L} := \big(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{B}\big) \oplus \mathbb{C} \subset U(\widehat{\mathfrak{h}})/\langle \mathbf{c} - 1\rangle$$

と定める. このとき, 任意の $x,\, y \in \mathcal{L}$ に対して, $[x, y] := xy - yx \in \mathcal{L}$ となることが分かる. したがって, $\mathcal{L}$ は, 自然なリー積に関して, リー代数になる.

さて, 任意の $r \in \mathbb{C}$ を取り固定する. $x,\, y \in \mathcal{L}$ に対して,

$$[x,\, y]_r := \pi_1([x, y]) + r\pi_2([x, y]) \tag{1.3}$$

と定める. 但し, $\pi_1 : \mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{B}$ および $\pi_2 : \mathcal{L} \twoheadrightarrow \mathbb{C}$ は, それぞれ $\mathcal{L} = (\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{B}) \oplus \mathbb{C}$ から $\mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\,\mathcal{B}$ および $\mathbb{C}$ への射影である. このとき, $[\cdot\,, \cdot]_r$ は $\mathcal{L}$ 上のリー積になる ([AM, §2.1]). この新たなリー積に関するリー代数 $\mathcal{L}$ を, $\mathcal{L}_{d,r}$ で表す.

1.2 Verma 型の $\mathcal{L}_{d,r}$-加群 $M_{d,r}$.

$$\mathcal{B}_+ := \left\{ v^{ij}(m, n) \in \mathcal{B} \mid m \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \text{ または } n \in \mathbb{Z}_{\geq 0} \right\},$$
$$\mathcal{B}_- := \left\{ v^{ij}(m, n) \in \mathcal{B} \mid m, n \in \mathbb{Z}_{<0} \right\},$$

とし, $\mathcal{L}^+_{d,r} := \left(\mathrm{Span}_{\mathbb{C}} \mathcal{B}_+\right) \oplus \mathbb{C} \subset \mathcal{L}_{d,r}$ とおく. このとき, $\mathcal{L}^+_{d,r}$ は $\mathcal{L}_{d,r}$ の部分リー代数になる. 1 次元の $\mathcal{L}^+_{d,r}$-加群 $\mathbb{C}\mathbf{1}$ を, $x \cdot \mathbf{1} = 0$ $(x \in \mathcal{B}_+)$, および $s \cdot \mathbf{1} = s\mathbf{1}$ $(s \in \mathbb{C} \subset \mathcal{L}^+_{d,r})$ によって定め,

$$M_{d,r} := U(\mathcal{L}_{d,r}) \otimes_{U(\mathcal{L}^+_{d,r})} \mathbb{C}\mathbf{1}$$

とおく.

ここで, Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) の定理を用いて, $\mathcal{L}_{d,r}$-加群 $M_{d,r}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底を与えよう. 集合 $\mathcal{B}_-$ 上に全順序 $\succ$ を (適当に) 定める. そして, $\mathcal{B}^-$ の元の有限列であって全順序 $\succ$ に関して広義単調減少なもの全体の集合を $\mathcal{S}$ とする. さらに, $\mathbf{x} = (x_p \succeq x_{p-1} \succeq \cdots \succeq x_1) \in \mathcal{S}$ $(x_q \in \mathcal{B}_-;\ 1 \leq q \leq p)$ に対して,

$$w(\mathbf{x}) := x_p x_{p-1} \cdots x_1 \mathbf{1} \in M_{d,r}$$

と定める. すると, PBW の定理より, $\mathbb{B} := \{w(\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} \in \mathcal{S}\}$ が $M_{d,r}$ の $\mathbb{C}$ 上の基底となる.

次に $M_{d,r}$ の次数空間分解を与えよう. $\mathbf{x} = (x_p \succeq x_{p-1} \succeq \cdots \succeq x_1) \in \mathcal{S}$, $x_q = v^{i_q j_q}(m_q, n_q) \in \mathcal{B}_-$ $(1 \leq q \leq p)$ に対して, $w(\mathbf{x}) \in \mathbb{B}$ の次数を

$$\deg(w(\mathbf{x})) = -\sum_{q=1}^{p} (m_q + n_q) \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

によって定める. このとき,

$$M_{d,r} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} (M_{d,r})_n, \quad \text{但し, } (M_{d,r})_n := \mathrm{Span}_{\mathbb{C}}\left\{ b \in \mathbb{B} \mid \deg b = n \right\}.$$

ここで,

$$(M_{d,r})_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}, \qquad (M_{d,r})_1 = \{0\} \tag{1.4}$$

であることに注意しておこう.

1.3　VOA $V_{d,r}$. $1 \le i, j \le d$ と $m \in \mathbb{Z}$ に対して, $L^{ij}(m) \in \mathrm{End}(M_{d,r})$ を

$$L^{ij}(m) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{h\in\mathbb{Z}} v^{ij}(m-h,\, h) & (i \ne j \text{ または } m \ne 0 \text{ のとき}), \\ \dfrac{1}{2}v^{ii}(0,\,0) + \displaystyle\sum_{h\in\mathbb{Z}_{>0}} v^{ii}(-h,\, h) & (i = j \text{ かつ } m = 0 \text{ のとき}), \end{cases} \tag{1.5}$$

によって定め, $V_{d,r}$ を

$$\left\{ L^{i_1j_1}(m_1)L^{i_2j_2}(m_2)\cdots L^{i_pj_p}(m_p)\mathbf{1} \;\middle|\; \begin{array}{l} p \ge 0;\, 1 \le i_q,\, j_q \le d, \\ m_q \in \mathbb{Z}\ (1 \le q \le p) \end{array} \right\}$$

で張られる $M_{d,r}$ の部分空間とする. このとき, $V_{d,r}$ は ($M_{d,r}$ から誘導される) 次数空間分解を持つ: $V_{d,r} = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}_{\ge 0}} (V_{d,r})_n$, 但し, $(V_{d,r})_n := V_{d,r} \cap (M_{d,r})_n$ $(n \in \mathbb{Z}_{\ge 0})$. 特に, (1.4) より, $(V_{d,r})_0 = \mathbb{C}\mathbf{1}$ および $(V_{d,r})_1 = \{0\}$ となることに注意する.

Ashihara と Miyamoto [AM] の主結果は次の定理である.

定理 1.1 ([AM]). (1) $V_{d,r}$ には次のような VOA の構造が一意的に定まる: まず, $V_{d,r}$ の頂点作用素 $Y(\cdot\,, z) : V_{d,r} \to \mathrm{End}(V_{d,r})[[z, z^{-1}]]$ は,

$$Y(L^{ij}(-2)\mathbf{1},\, z) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} L^{ij}(m) z^{-m-2} \quad (1 \le i,\, j \le d),$$

$$Y(\mathbf{1},\, z) = \mathrm{id}_{V_{d,r}}$$

を満たす. また, $V_{d,r}$ の真空元は $\mathbf{1} \in (V_{d,r})_0 = (M_{d,r})_0$ であり, Virasoro 元は $\omega := \sum_{i=1}^{d} L^{ii}(-2)\mathbf{1} \in (V_{d,r})_2 \subset (M_{d,r})_2$ である.

(2) $V_{d,r}$ は次の (i) 〜 (iv) を満たす (「§0 概要」の定理 1 で述べたもの).

(i) $V_{d,r}$ の中心電荷は dr,

(ii) $V_{d,r}$ は条件 (G) を満たす,

(iii) Griess 代数 $(V_{d,r})_2$ は Jordan 代数になる,

(iv) Jordan 代数として, $(V_{d,r})_2 \cong \mathrm{Sym}_d(\mathbb{C})$.

1.4　論文 [NS] の主結果. さて, 論文 [NS] の主結果を述べよう. 「§0 概要」の注意で述べたように, $d \ge 2$ の場合を考えればよい.

定理 1.2 ([NS] の主結果). $d \ge 2$ とする. VOA $V_{d,r}$ が単純であるための必要十分条件は, r が整数ではないことである:

$$\text{VOA } V_{d,r} \text{ が単純} \quad \Longleftrightarrow \quad r \notin \mathbb{Z}$$

2 定理 1.2 の証明の概略.

以下, 断らなければ, $d \geq 2$ とする. 定理 1.2 の証明の流れは以下の通りである.

Step 1. VOA $V_{d,r}$ は $M_{d,r}$ の部分空間として構成されていたことを思い出そう. まず, ($d \geq 2$ であれば) $V_{d,r}$ は $M_{d,r}$ と一致すること, すなわち, $V_{d,r} = M_{d,r}$ となることを示した ([NS, Proposition 3.1]).[2]

Step 2. VOA $V_{d,r}$ ($= M_{d,r}$) が単純であることと $M_{d,r}$ が既約 $\mathcal{L}_{d,r}$-加群であることが同値であることを示した ([NS, Proposition 3.4]). これによって, VOA の単純性を調べる問題が, リー代数の (Verma 型の) 加群の既約性を調べるという比較的取り組みやすい問題に変換される.

Step 3. Step 2 において, 当初の問題が $M_{d,r}$ の既約性を調べる問題に帰着されたが, それをより簡単にする: $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r} \subset \mathcal{L}_{d,r}$ を $\mathcal{B}^{(1)} := \{v^{11}(m,n) \mid m, n \in \mathbb{Z} \text{ with } m \leq n\} \subset \mathcal{B}$ で生成される $\mathcal{L}_{d,r}$ の部分リー代数とし, $M^{(1)}_{d,r} := U(\mathcal{L}^{(1)}_{d,r})\mathbf{1} \subset M_{d,r}$ とおく ($\mathcal{L}^{(1)}_{d,r}$ は, リー代数として, $\mathcal{L}_{1,r}$ と同型であり, $M^{(1)}_{d,r}$ は, $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r} \cong \mathcal{L}_{1,r}$ の加群として, $M_{1,r}$ と同型である). 証明の第 3 段階では, $M_{d,r}$ が $\mathcal{L}_{d,r}$-加群として既約であることと $M^{(1)}_{d,r}$ が $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r}$-加群として既約であることが同値であることを示した ([NS, Proposition 4.1]).

Step 4. $M^{(1)}_{d,r}$ が $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r}$-加群として既約であるかどうかを調べる. それには, 次の問題を考えればよい.

問題. $u \in M^{(1)}_{d,r} \setminus \mathbb{C}\mathbf{1}$ であって, $m + n > 0$ を満たす全ての $v^{11}(m,n) \in \mathcal{B}^{(1)}$ について $v^{11}(m,n)u = 0$ となるものが存在するか? (つまり, $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r}$ に関する自明でない特異ベクトルがあるかどうかを調べる.)

もしそのような u があれば, u で生成される $\mathcal{L}^{(1)}_{d,r}$-部分加群 $U(\mathcal{L}^{(1)}_{d,r})u$ が $M^{(1)}_{d,r}$ の自明でない部分加群になるので, $M^{(1)}_{d,r}$ は可約ということになる. 一方, そのような u がなければ, $M^{(1)}_{d,r}$ は既約である.

---

[2] ちなみに, この命題は $d = 1$ の場合は成立しない. すなわち, $V_{1,r} \subsetneq M_{1,r}$ である.

我々は, 直接的な計算によって, $r \notin \mathbb{Z}$ の場合には $M_{d,r}^{(1)}$ には自明でない特異ベクトルが存在しないことを証明した ([NS, Proposition 5.1]). さらに, その計算の過程で, $r \in \mathbb{Z}$ の場合には $M_{d,r}^{(1)}$ に自明でない特異ベクトルが存在すること, 及び, その特異ベクトルの形が推測でき, 次の命題を得た (この命題をもって定理 1.2 が証明されたことになる).

命題 2.1 ([NS, Proposition 6.1]). $r \in \mathbb{Z}$ とする. また, $p, \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を $r = 1 - 2\nu + p$ を満たす正の整数とする. このとき, $(\det \mathbf{V}_p)^{\nu}\mathbf{1} \in M_{d,r}^{(1)}$ は特異ベクトルである. ここで,

$$\mathbf{V}_p := \left(v^{11}(-s, -t)\right)_{1 \leq s, t \leq p}$$

である. ($\mathbf{V}_p$ は $\mathcal{B}_{-}^{(1)} := \mathcal{B}^{(1)} \cap \mathcal{B}_{-}$ の元を成分とする $p \times p$ 行列である. $\mathcal{B}_{-}^{(1)}$ の元同士は互いに可換なので $\mathbf{V}_p$ の行列式を自然に考えることができる.)

注意 2.2 ([NS, Proposition 6.4]). $M_{d,r}^{(1)}$ の特異ベクトルは, 命題 2.1 で述べたもので (本質的には) 全てである. 実際,

$$X := \left\{(\det \mathbf{V}_p)^{\nu}\mathbf{1} \;\middle|\; p, \nu \in \mathbb{Z}_{\geq 1} \text{ with } r = 1 - 2\nu + p\right\} \subset M_{d,r}^{(1)} \tag{2.1}$$

で生成される $\mathcal{L}_{d,r}^{(1)}$-部分加群を $W_{d,r}^{(1)}$ とすると, $W_{d,r}^{(1)}$ は $M_{d,r}^{(1)}$ の (自明でない) 最大 $\mathcal{L}_{d,r}^{(1)}$-部分加群になる.

さて, $r \in \mathbb{Z}$ の場合は, $V_{d,r}$ は単純ではなく, $V_{d,r}$ には (自明でない) 最大イデアルが存在する. 実は, (2.1) の X ($\subset M_{d,r}^{(1)} \subset M_{d,r} = V_{d,r}$) は, この最大イデアルの生成系にもなっている.

命題 2.3. $I_{d,r}$ を X で生成される $V_{d,r}$ のイデアルとする. このとき, $I_{d,r}$ は $V_{d,r}$ の (自明でない) 最大イデアルである. したがって, $V_{d,r}/I_{d,r}$ は単純な VOA となる.

最後に. 今回, この研究集会で講演する機会を下さった山田裕理先生に感謝いたします. ありがとうございました.

References

[AM] T. Ashihara and M. Miyamoto, Deformation of central charges, vertex operator algebras whose Griess algebras are Jordan algebras, preprint 2007.

[FLM] I.B. Frenkel, J. Lepowsky, and A. Meurman, "Vertex Operator Algebras and the Monster", Pure and Appl. Math. Vol. 134, Academic Press, 1988.

[La] C.H. Lam, On VOA associated with special Jordan algebra, *Comm. Algebra* **27** (1999), 1665–1681.

[LL] J. Lepowsky and H. Li, "Introduction to Vertex Operator Algebras and Their Representations", Progr. Math. Vol. 227, Birkhäuser Boston, Boston, 2004.

[M] M. Miyamoto, Griess algebras and conformal vectors in vertex operator algebras, *J. Algebra* **179** (1996), 523–548.

[NS] Simplicity of a vertex operator algebra whose Griess algebra is the Jordan algebra of symmetric matrices, preprint 2008, arXiv:0901.0841, to appear in Comm. Algebra.

[W] W. Wang, Rationality of Virasoro vertex operator algebras, *Int. Math. Res. Not.* **1993** (1993), no. 7, 197–211.